数理解析研究所講究録
第1758巻2011年90-99

The non-regular statistical structure from the viewpoint of the loss of information

筑波大・数理物質　Kim Hyo Gyeong
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大・数理物質　大谷内 奈穂 (Nao Ohyauchi)
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大　赤平 昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1. はじめに

未知母数 θ をもつ母集団分布の密度が正則条件を満たすような正則な場合には，θ に関する Fisher 情報量，Kullback-Leibler 情報量等が定義され，十分統計量の特徴付けも知られている (Zacks[Z81])．しかし，正則条件が必ずしも満たされないような非正則な場合には，上記のような情報量は適用できないので，もっと一般的な情報量を考える必要がある．本稿では，Akahira([A95b], [A96]) によって提案された一般化情報量を用いて，統計量の漸近的な情報量損失を用いて非正則構造を解明する ([AKO10])．

非正則分布族の場合には，統計量の情報量は分布の非正則性に依存する．従来，Akahira[A96] において密度の台が区間であるときに，区間の両端点において密度の値は等しく，また両端点において密度の微分係数の和が 0 であることを仮定して，極値統計量と漸近補助統計量の組から成る統計量の 2 次の漸近情報量損失が $o(1)$ となることを示した．一方，その仮定が緩和され得ることは [A96] において示唆されていたが，その情報量損失の計算は面倒になると予想されていた．本稿では，上記の条件を仮定しないときにも同様なことが成り立つことを示し，そのいくつかの例も挙げる．

2. 一般化情報量の定義と性質

標本空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度 P, Q が，ある σ-有限測度 μ に関して絶対連続であると仮定する．このとき，各 $\alpha(|\alpha| < 1)$ について

$$I^{(\alpha)}(P,Q) := -\frac{8}{1-\alpha^2}\log\int_{\mathcal{X}}\left(\frac{dP}{d\mu}\right)^{(1-\alpha)/2}\left(\frac{dQ}{d\mu}\right)^{(1+\alpha)/2}d\mu \tag{2.1}$$

によって定義する ([A95b],[A96])．この情報量は測度 μ の取り方に無関係であることに注意．特に $\alpha = 0$ とすれば

$$I^{(0)}(P,Q) = -8\log\int_{\mathcal{X}}\left(\frac{dP}{d\mu}\frac{dQ}{d\mu}\right)^{1/2}d\mu \tag{2.2}$$

となり，右辺の積分値は類似度 (affinity) と呼ばれている ([M55],[AT91],[L90]).

いま，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に，いずれも (σ-有限測度 μ に関する) 確率密度関数 (p.d.f.) $f(\cdot,\theta)(\theta \in \Theta)$ をもつ分布に従う実確率変数とする．ただし，Θ は母数空間とし，$\boldsymbol{R}^1$ の開区間とする．このとき，任意の $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ に対して，$f(\cdot,\theta_1)$ と $f(\cdot,\theta_2)$ の間に関して X_1 がもつ一般化情報量 (generalized amount of information) を，各 $\alpha(|\alpha|<1)$ について

$$I_{X_1}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) := -\frac{8}{1-\alpha^2}\log\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta_1)^{(1-\alpha)/2} f(x,\theta_2)^{(1+\alpha)/2} d\mu(x) \tag{2.3}$$

で表わす．ここで，$\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ の同時 (j.)p.d.f. を $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot,\theta)$ とすれば，$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)$ となる．ただし，$\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n)$ とする．そして，(2.3) と同様に $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot,\theta_1)$ と $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot,\theta_2)$ の間に関して $\boldsymbol{X}$ がもつ一般化情報量を $I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2)$ で表わせば

$$I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) = nI_{X_1}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) \quad (|\alpha|<1)$$

になる．もっと一般に，統計量 $T_n = T_n(\boldsymbol{X})$ の p.d.f. として $f_{T_n}(t,\theta)(\theta \in \Theta)$ が与えられれば，同様にして T_n がもつ一般化情報量も定義できて，それを $I_{T_n}^{(\alpha)}(\cdot,\cdot)$ で表わす．このとき，適当な条件の下では

$$I_{T_n}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) \le I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) \quad (|\alpha|<1)$$

が成り立つ．

ここで，一般化情報量と Fisher 情報量との関係については，適当な正則条件の下で，任意の $\alpha(|\alpha|<1)$ に対して

$$I_{X_1}^{(\alpha)}(\theta,\theta+\Delta\theta) = I_{X_1}(\theta)(\Delta\theta)^2 + o((\Delta\theta)^2) \quad (\Delta\theta \to 0)$$

になる ([A95b],[A96])．ただし，$I_{X_1}(\theta) := E_\theta[\{(\partial/\partial\theta)\log f(X_1,\theta)\}^2]$ (Fisher 情報量) とする．

次に，2 つの統計量 $T_1 = T_1(\boldsymbol{X}), T_2 = T_2(\boldsymbol{X})$ について，(T_1,T_2) の (直積測度 $\mu_{T_1} \otimes \mu_{T_2}$ に関する) 同時密度を $f_\theta(t_1,t_2)$ とし，$f_\theta(t_1|t_2)$ を T_2 を与えたとき，T_1 の (μ_{T_1} に関する) 条件付密度とし，$f_\theta(t_2|t_1)$ を T_1 を与えたとき，T_2 の (μ_{T_2} に関する) 条件付密度とする．ここで，任意の $\theta_1,\theta_2 \in \Theta$ に対して，$f_{\theta_1}(\cdot|t_2)$ と $f_{\theta_2}(\cdot|t_2)$ の間に関して T_2 を与えたときの T_1 がもつ条件付一般化情報量を

$$I_{T_1|T_2}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) = -\frac{8}{1-\alpha^2}\log\int f_{\theta_1}(t_1|t_2)^{(1-\alpha)/2} f_{\theta_2}(t_1|t_2)^{(1+\alpha)/2} d\mu_{T_1}(t_1)$$

で定義する．このとき，次のことが得られる．

補題 2.1([A96]). 任意の $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $|\alpha| < 1$ について

$$\begin{aligned} I_{T_1,T_2}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) &= -\frac{8}{1-\alpha^2}\log\int\Big[\exp\Big\{-\frac{1-\alpha^2}{8}I_{T_1|T_2}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2)\Big\}\Big] \\ &\qquad\qquad \cdot g_{\theta_1}(t_2)^{(1-\alpha)/2}g_{\theta_2}(t_2)^{(1+\alpha)/2}d\mu_{T_2}(t_2) \\ &= -\frac{8}{1-\alpha^2}\log E\Big[\exp\Big\{-\frac{1-\alpha^2}{8}I_{T_1|T_2}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2)\Big\}\Big] + I_{T_2}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

である．ただし，$E[\,\cdot\,]$ は密度

$$g_{\theta_1}(t_2)^{(1-\alpha)/2}g_{\theta_2}(t_2)^{(1+\alpha)/2}\Big/\int g_{\theta_1}(t_2)^{(1-\alpha)/2}g_{\theta_2}(t_2)^{(1+\alpha)/2}d\mu_{T_2}(t_2)$$

の下での期待値を意味する．

本稿では，$|\alpha| < 1$ について，任意の統計量 $T = T(\boldsymbol{X})$ の一般化情報量損失 $I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) - I_T^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2)$ を考え，次節では $|\theta_1 - \theta_2| = O(1/n)$ のときに，漸近的にオーダー $o(n^{-1})$ までその情報量損失について論じる．

3. 極値統計量の一般化情報量

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue測度に関して)p.d.f. $f(\cdot,\theta)(\theta \in \Theta)$ をもつ分布に従う実確率変数とする．このとき，θ が位置母数である場合，すなわち $f(x,\theta) = f_0(x-\theta)$ $(\mathcal{X} = \Theta = \boldsymbol{R}^1)$ の場合を考える．また，次の条件を仮定する．

(A1) $f_0(x) > 0$ $(a < x < b)$; $f_0(x) = 0$ $(x \le a, x \ge b)$.

ただし，a, b は有限とする．

(A2) $f_0(\cdot)$ は開区間 (a,b) 上で 2 回連続微分可能で，

$$c_1 := \lim_{x\to a+0} f_0(x) = f_0(a+0) > 0, \quad c_2 := \lim_{x\to b-0} f_0(x) = f_0(b-0) > 0,$$
$$c_1' := \lim_{x\to a+0} f_0'(x) = f_0'(a+0), \quad c_2' := \lim_{x\to b-0} f_0'(x) = f_0'(b-0)$$

である．

上記の条件の下では，一致性のオーダーは n になる．なお，Akahira[A96] においては，さらに条件

(A3) $c := c_1 = c_2$, $h := c_2' = -c_1'$

を仮定している．しかし，この条件は制約的であり，Akahira[A96] の Remark 3.2 において，条件 (A3) が仮定されない場合への拡張が示唆されている．本稿では，基本的には条件 (A3) を仮定しないで考える．

まず，$f_0(\cdot - \theta)$ と $f_0(\cdot - \theta - \Delta)$ の間に関する X_1 がもつ一般化情報量を計算して，次の結果を得る．

定理 3.1 条件 (A1), (A2) が成り立つと仮定する．このとき，$|\alpha|<1$ について $|\Delta|\to 0$ とすれば,

$$I_{X_1}^{(\alpha)}(\theta,\theta+\Delta)=\begin{cases}4\Big(\dfrac{c_1}{1+\alpha}+\dfrac{c_2}{1-\alpha}\Big)\Delta+\Big[\dfrac{4}{1-\alpha^2}(c_1'+c_1^2)-\dfrac{2}{1-\alpha}\{(c_1'+c_2') \\ \quad +(c_1^2-c_2^2)\}+I_0-(c_1-c_2)^2\Big]\Delta^2+o(\Delta^2) & (\Delta>0), \\ -4\Big(\dfrac{c_1}{1-\alpha}+\dfrac{c_2}{1+\alpha}\Big)\Delta+\Big[-\dfrac{4}{1-\alpha^2}(c_2'-c_2^2)+\dfrac{2}{1-\alpha}\{(c_1'+c_2') \\ \quad +(c_1^2-c_2^2)\}+I_0-(c_1-c_2)^2\Big]\Delta^2+o(\Delta^2) & (\Delta<0)\end{cases} \tag{3.1}$$

が成り立つ．

注意 3.1 一般化情報量 (3.1) は次のようにも変形できる．

$$I_{X_1}^{(\alpha)}(\theta,\theta+\Delta)=\begin{cases}\dfrac{4}{1-\alpha^2}\{(1-\alpha)c_1+(1+\alpha)c_2\}\Delta \\ \quad +\dfrac{1}{1-\alpha^2}\big[2\{(1-\alpha)c_1'-(1+\alpha)c_2'\} \\ \quad +\{(1-\alpha)c_1+(1+\alpha)c_2\}^2\big]\Delta^2+I_0\Delta^2+o(\Delta^2) \quad (\Delta>0), \\ -\dfrac{4}{1-\alpha^2}\{(1+\alpha)c_1+(1-\alpha)c_2\}\Delta \\ \quad +\dfrac{1}{1-\alpha^2}\big[2\{(1+\alpha)c_1'-(1-\alpha)c_2'\} \\ \quad +\{(1+\alpha)c_1+(1-\alpha)c_2\}^2\big]\Delta^2+I_0\Delta^2+o(\Delta^2) \quad (\Delta<0).\end{cases}$$

系 3.1([A96])．条件 (A1)~(A3) が成り立つと仮定する．このとき，$|\alpha|<1$ について $|\Delta|\to 0$ とすれば,

$$I_{X_1}^{(\alpha)}(\theta,\theta+\Delta)=\frac{8c}{1-\alpha^2}|\Delta|+\Big\{\frac{4}{1-\alpha^2}(c^2-h)+I_0\Big\}\Delta^2+o(\Delta^2)$$

が成り立つ．

上記の定理 3.1 から $I_{\mathbf{X}}(\theta,\theta+\Delta)=nI_{X_1}(\theta,\theta+\Delta)$ を求めることができるが，これに対して漸近的に一般化情報量損失を起こさないような統計量は存在するかという問題は興味深い．その候補として Akahira[A96] で提案された統計量を取り上げてみよう．

まず，極値統計量

$$\underline{\theta}:=\max_{1\le i\le n}X_i-b,\quad \bar{\theta}:=\min_{1\le i\le n}X_i-a$$

を考える．ここで，θ_0 を真の母数とし，$\hat{\theta}^*:=(\underline{\theta}+\bar{\theta})/2$ とおくと，$\hat{\theta}^*$ は $\{n\}$- 一致推定量になる ([A75],[A95a])．そして，$U:=n(\bar{\theta}-\theta_0)$, $V:=n(\underline{\theta}-\theta_0)$ とおくと，(U,V) の 2 次

の漸近同時密度は

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} c_1c_2e^{c_2v-c_1u}\Big[1+\dfrac{1}{n}\Big\{-1+2(c_1u-c_2v) \\ \quad +\dfrac{1}{2}(c_2'v^2-c_1'u^2-(c_1u-c_2v)^2)+\left(\dfrac{c_1'}{c_1}u+\dfrac{c_2'}{c_2}v\right)\Big\}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\Big] & (v<0<u), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．このとき，$f(\cdot-\theta_0)$ と $f(\cdot-\theta_0-\Delta)$ の間に関して統計量 $(n\bar{\theta}, n\underline{\theta})$ がもつ一般化情報量は次のようになる．

補題 3.1 条件 (A1), (A2) が成り立つと仮定する．このとき，$|\alpha|<1$ について $|\Delta|\to 0$ とすれば，

$$I^{(\alpha)}_{n\bar{\theta},n\underline{\theta}}(\theta_0,\theta_0+\Delta) = \begin{cases} 4\Big(\dfrac{c_1}{1+\alpha}+\dfrac{c_2}{1-\alpha}\Big)\Delta+\dfrac{4(c_1'+c_1^2)}{(1-\alpha^2)n}\Delta^2 \\ \quad -\dfrac{2}{(1-\alpha)n}\{(c_1'+c_2')+(c_1^2-c_2^2)\}\Delta^2+o\left(\dfrac{\Delta^2}{n}\right) & (\Delta>0), \\ -4\Big(\dfrac{c_1}{1-\alpha}+\dfrac{c_2}{1+\alpha}\Big)\Delta-\dfrac{4(c_2'-c_2^2)}{(1-\alpha^2)n}\Delta^2 \\ \quad +\dfrac{2}{(1-\alpha)n}\{(c_1'+c_2')+(c_1^2-c_2^2)\}\Delta^2+o\left(\dfrac{\Delta^2}{n}\right) & (\Delta<0) \end{cases} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

系 3.2([A96]). 条件 (A1)〜(A3) が成り立つと仮定する．このとき，$|\alpha|<1$ について $|\Delta|\to 0$ とすれば，

$$I^{(\alpha)}_{n\bar{\theta},n\underline{\theta}}(\theta_0,\theta_0+\Delta) = \frac{8}{1-\alpha^2}c|\Delta|+\frac{4}{(1-\alpha^2)n}(c^2-h)\Delta^2+o\left(\frac{\Delta^2}{n}\right)$$

が成り立つ．

4. 極値統計量と補助統計量の組から成る統計量の一般化情報量損失

前節では極値統計量の一般化情報量損失を求めたが，本節ではさらに補助統計量も組み入れて考える．まず，

$$Z_1(\theta) := -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_0'(X_i-\theta)}{f_0(X_i-\theta)}-\sqrt{n}(c_1-c_2) \quad (\underline{\theta}<\theta<\bar{\theta})$$

とし，$Z_1^*=Z_1(\hat{\theta}^*)$ とする．このとき Z_1^* は漸近補助統計量になる．ここで，Schwarz の不等式から

$$I_0 := \int_a^b\left\{\frac{f_0'(x)}{f_0(x)}\right\}^2 f_0(x)dx \geq \left(\int_a^b f_0'(x)dx\right)^2 = (c_2-c_1)^2 \tag{4.1}$$

となるから $C := I_0 - (c_1 - c_2)^2 \geq 0$ になる.

補題 4.1 条件 (A1), (A2) が成り立ち, $C > 0$, $\Delta = O(1/n)$ であると仮定する. このとき, $\bar{\theta}$ と $\underline{\theta}$ を与えたときの $Z_1^*/(C\sqrt{n})$ の条件付情報量は, $|\alpha| < 1$ について $n \to \infty$ のとき

$$I^{(\alpha)}_{Z_1^*/(C\sqrt{n})|\bar{\theta},\underline{\theta}}(\theta_0, \theta_0 + \Delta) = Cn\Delta^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

である.

ここで, (2.4), 補題 3.1 と補題 4.1 より次のことを得る.

定理 4.1 条件 (A1), (A2) が成り立ち, $C > 0$, $\Delta = O(1/n)$ であると仮定する. このとき, 統計量 $(Z_1^*/(C\sqrt{n}), \bar{\theta}, \underline{\theta})$ の一般化情報量は, $|\alpha| < 1$ について, $n \to \infty$ とすれば,

$$\begin{aligned} &I^{(\alpha)}_{Z_1^*/(C\sqrt{n}),\bar{\theta},\underline{\theta}}(\theta_0, \theta_0 + \Delta) \\ &= \begin{cases} 4\Big(\dfrac{c_1}{1+\alpha} + \dfrac{c_2}{1-\alpha}\Big)n\Delta + \Big[\dfrac{4}{1-\alpha^2}(c_1' + c_1^2) - \dfrac{2}{1-\alpha}\{(c_1' + c_2') + (c_1^2 - c_2^2)\} \\ \qquad\qquad + I_0 - (c_1 - c_2)^2\Big]n\Delta^2 + o(n\Delta^2) \qquad (\Delta > 0), \\ -4\Big(\dfrac{c_1}{1-\alpha} + \dfrac{c_2}{1+\alpha}\Big)n\Delta + \Big[-\dfrac{4}{1-\alpha^2}(c_2' - c_2^2) + \dfrac{2}{1-\alpha}\{(c_1' + c_2') + (c_1^2 - c_2^2)\} \\ \qquad\qquad + I_0 - (c_1 - c_2)^2\Big]n\Delta^2 + o(n\Delta^2) \qquad (\Delta < 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2}$$

である.

さて, 一般に, 任意の統計量 $T = T(\boldsymbol{X})$ の 2 次の漸近一般化情報量損失を, $|\alpha| < 1$ について $n \to \infty$ のとき

$$L_n^{(\alpha)}(T) := \frac{1}{n\Delta^2}\left\{I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}(\theta, \theta + \Delta) - I_T^{(\alpha)}(\theta, \theta + \Delta)\right\} + o(1) \tag{4.3}$$

によって定義する ([A96]). ただし, $\Delta = O(1/n)$ とする. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 4.2 条件 (A1), (A2) が成り立ち, $C > 0$, $\Delta = O(1/n)$ であると仮定する. このとき, 統計量 $T_n^* := (Z_1^*/(C\sqrt{n}), \bar{\theta}, \underline{\theta})$ の 2 次の漸近一般化情報量損失は無い, すなわち $|\alpha| < 1$ について, $n \to \infty$ とすれば

$$L_n^{(\alpha)}(T_n^*) = o(1)$$

である.

この証明は, (3.1) と (4.2) から明らかである. 一方, (3.1), (3.2), (4.3) より極値統計量 $(\bar{\theta}, \underline{\theta})$ の 2 次の漸近一般化情報量損失は, $|\alpha| < 1$ について $n \to \infty$ とすれば

$$L_n^{(\alpha)}(\bar{\theta}, \underline{\theta}) = I_0 - (c_1 - c_2)^2 + o(1) = C + o(1) \tag{4.4}$$

となる．ここで，(4.1) より $C=0$ すなわち $I_0=(c_1-c_2)^2$ であるための必要十分条件は f_0 が一様分布または切断指数分布の密度になることである．そして $C=0$ の場合には (4.4) より $L_n^{(\alpha)}(\bar{\theta},\underline{\theta})=o(1)\ (n\to\infty)$ となり，極値統計量 $(\bar{\theta},\underline{\theta})$ の 2 次の漸近一般化情報量損失は無いことが分かる．このことは，一様分布，切断指数分布の場合には固定した n について，$(\bar{\theta},\underline{\theta})$ が θ に対する十分統計量になるという事実とも符合している．

また，定理 4.2 の命題は，Akahira([A91]) における統計量 T_n^* が 2 次の漸近的十分であるという事実とも符合している．そして，T_n^* の中で，極値統計量 $(\bar{\theta},\underline{\theta})$ は，密度 $f_0(\cdot-\theta)$ の台の端点 $a+\theta, b+\theta$ に関する情報量をもち，また $(\bar{\theta},\underline{\theta})$ を与えたときの $Z_1^*/(C\sqrt{n})$ の条件付情報量は台の区間 $(a+\theta,b+\theta)$ の内部に関する情報量とその区間の両端点での密度の差とから成っていることが分かる．しかし，条件 (A3) まで仮定すると，$c_1=c_2$ より $C=I_0$ となり，$Z_1^*/(C\sqrt{n})$ の条件付情報量において台の両端での情報は消えてしまい，却って非正則な構造が見えなくなる．そのことからも条件 (A3) を仮定しないことには意味がある．

5．例

前節の結果を適用するために，Akahira([A96]) において取り扱われた分布に類似した例を挙げる．

例 5.1 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に，いずれも密度

$$f_0(x-\theta)=\begin{cases} ce^{\gamma(x-\theta)^{2k}} & (a<x-\theta<b), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数列とする．ただし，$a<b$ とし，$\theta\in\boldsymbol{R}^1, \gamma\neq 0, k=1,2,\cdots$ で，c は a,b かつ γ,k に依存する正規化定数とする．このとき

$$c_1=\lim_{x\to a+0} f_0(x)=ce^{\gamma a^{2k}}, \quad c_2=\lim_{x\to b-0} f_0(x)=ce^{\gamma b^{2k}},$$
$$c_1'=\lim_{x\to a+0} f_0'(x)=2\gamma kca^{2k-1}e^{\gamma a^{2k}}, \quad c_2'=\lim_{x\to b-0} f_0'(x)=2\gamma kcb^{2k-1}e^{\gamma b^{2k}},$$
$$I_0=4\gamma^2k^2c\int_a^b x^{2(2k-1)}e^{\gamma x^{2k}}dx$$

となり，条件 (A1), (A2) は満たされるから，定理 4.2 より統計量 $(Z_1^*/(C\sqrt{n}),\bar{\theta},\underline{\theta})$ の 2 次の漸近情報量損失は $o(1)$ になる．ただし，

$$Z_1^*=-\frac{2\gamma k}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\theta}^*)^{2k-1}-c\sqrt{n}(e^{\gamma a^{2k}}-e^{\gamma b^{2k}}),$$
$$C=I_0-c^2(e^{\gamma a^{2k}}-e^{\gamma b^{2k}})^2$$

である．一方，(4.4) より統計量 $(\bar{\theta},\underline{\theta})$ の 2 次の漸近情報量損失は $L_n^{(\alpha)}(\bar{\theta},\underline{\theta})=C+o(1)\ (n\to\infty)$ になる．

例 5.2(切断 t 分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に，いずれも密度

$$f_0(x-\theta) = \begin{cases} c\left(1+\dfrac{(x-\theta)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} & (a < x-\theta < b), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数列とする．ただし，$a < b$, $0 < \nu$ とし，c は a, b に依存する正規化定数で $\theta \in \boldsymbol{R}^1$ とする．このとき

$$c_1 = \lim_{x \to a+0} f_0(x) = c\{1+(a^2/\nu)\}^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad c_2 = \lim_{x \to b-0} f_0(x) = c\{1+(b^2/\nu)\}^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

$$c_1' = \lim_{x \to a+0} f_0'(x) = -ca\{1+(1/\nu)\}\{1+(a^2/\nu)\}^{-\frac{\nu+3}{2}},$$

$$c_2' = \lim_{x \to b-0} f_0'(x) = -cb\{1+(1/\nu)\}\{1+(b^2/\nu)\}^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

$$I_0 = c\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2 \int_a^b x^2 \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+5}{2}} dx$$

となり，条件 (A1), (A2) は満たされるから，定理 4.2 より統計量 $(Z_1^*/(C\sqrt{n}), \bar{\theta}, \underline{\theta})$ の 2 次の漸近情報量損失は $o(1)$ になる．ただし，

$$Z_1^* = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\theta}^*)\left(1+\frac{(X_i-\hat{\theta}^*)^2}{\nu}\right)^{-1}$$
$$- c\sqrt{n}\left\{\left(1+\frac{a^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} - \left(1+\frac{b^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\right\},$$

$$C = I_0 - c^2\left\{\left(1+\frac{a^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} - \left(1+\frac{b^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\right\}^2$$

である．一方，(4.4) より統計量 $(\bar{\theta}, \underline{\theta})$ の 2 次の漸近情報量損失は $L_n^{(\alpha)}(\bar{\theta}, \underline{\theta}) = C + o(1)$ $(n \to \infty)$ になる．

例 5.3(切断ロジスティック分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に，いずれも密度

$$f_0(x-\theta) = \begin{cases} \dfrac{ce^{x-\theta}}{(1+e^{x-\theta})^2} & (a < x-\theta < b), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数列とする．ただし，$a < b$,

$$c = \left(\frac{1}{1+e^{-b}} - \frac{1}{1+e^{-a}}\right)^{-1}$$

とし，$\theta \in \boldsymbol{R}^1$ とする．このとき

$$c_1 = \lim_{x \to a+0} f_0(x) = \frac{ce^{-a}}{(1+e^{-a})^2}, \quad c_2 = \lim_{x \to b-0} f_0(x) = \frac{ce^{-b}}{(1+e^{-b})^2},$$

$$c_1' = \lim_{x \to a+0} f_0'(x) = \frac{ce^{-a}(e^{-a}-1)}{(1+e^{-a})^3}, \quad c_2' = \lim_{x \to b-0} f_0'(x) = \frac{ce^{-b}(e^{-b}-1)}{(1+e^{-b})^3},$$

$$I_0 = c\int_a^b \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)^2}{(1+e^{-x})^4}dx$$

となり，条件 (A1), (A2) は満たされるから，定理4.2 より統計量 $(Z_1^*/(C\sqrt{n}), \bar{\theta}, \underline{\theta})$ の 2 次の漸近情報量損失は $o(1)$ になる．ただし，

$$Z_1^* = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-(X_i-\hat{\theta}^*)}}{1+e^{-(X_i-\hat{\theta}^*)}} - c\sqrt{n}\left\{\frac{e^{-a}}{(1+e^{-a})^2} - \frac{e^{-b}}{(1+e^{-b})^2}\right\}$$

$$C = I_0 - c^2\left\{\frac{e^{-a}}{(1+e^{-a})^2} - \frac{e^{-b}}{(1+e^{-b})^2}\right\}^2$$

である．一方，(4.4) より統計量 $(\bar{\theta}, \underline{\theta})$ の 2 次の漸近情報量損失は $L_n^{(\alpha)}(\bar{\theta}, \underline{\theta}) = C + o(1)$ $(n \to \infty)$ になる．

6. おわりに

密度の台が区間であるときに，区間の両端における密度に関する条件 (A3) は制約的であり，それを仮定すれば計算は比較的容易にはなるが，非正則性の構造が見え難くしてしまう面がある．本稿では，概ね [AKO10] に従って，その条件を外した場合を考えることによって，密度の両端での状況が統計量の情報量損失にどのように反映するかについて解明した．また，条件を緩めたことによってその適用範囲が大きく広がるメリットも大きいと考えられる．

参考文献

[A75] Akahira, M.(1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **22**, 8–26.

[A91] Akahira, M.(1991). Second order asymptotic sufficiency for a family of distributions with one-directionality. *Metron* **49**, 133–143.

[A95a] Akahira, M.(1995). The amount of information and the bound for the order of consistency for a location parameter family of densities. *Symposia Gaussiana, Conference B, Statistical Sciences, Proceedings of the 2nd Gauss Symposium*, (eds. V. Mammitzsch and H. Schneeweiss), 303–311, de Gruyter, Berlin.

[A95b] Akahira, M.(1995). The concept of generalized amount of information and non-regular estimation(In Japanese). *Proc. Symps. Res. Inst. Math. Sci.*, **916**, Kyoto Univ., 189–195.

[A96] Akahira, M.(1996). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **48**(2), 349–364.

[AKO10] Akahira, M., Kim, H.G. and Ohyauchi, N.(2010). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions, II. *Mathematical Research Note* 2010–001, Institute of Mathematics, University of Tsukuba.

[AT91] Akahira, M. and Takeuchi, K.(1991). A definition of information amount applicable to non-regular cases. *Journal of Computing and Information* **2**, 71-92. Also included In:*Joint Statistical Papers of Akahira and Takeuchi*, World Scientific, New Jersey, 2003, 455–476.

[L90] LeCam, L.(1990). On standard asymptotic confidence ellipsoids of Wald. *Internat. Statist. Rev.*, **58**, 129–152.

[M55] Matusita, K.(1955). Decision rules based on the distance for problems of fit, two samples and estimation. *Ann. Math. Statist.*, **26**, 631–640.

[Z81] Zacks, S.(1981). *Parametric Statistical Inference.* Pergamon Press, Oxford.